Conhecimento Interpretativo para Ensinar Matemática e História da (Educação) Matemática: contributos para a Formação

Miguel Ribeiro

Resumo

Este texto discute a necessidade de potenciar o desenvolvimento de um conhecimento do professor que permita assumir como ponto de partida para a prática posterior os conhecimentos, raciocínios e produções dos alunos (Conhecimento Interpretativo) no âmbito dos racionais. Debate potencialidades – para a formação, a prática e a investigação – de considerar a História da (Educação) Matemática simultaneamente uma ferramenta e um contexto, efetuando uma discussão centrada no conteúdo ideal de cada um dos diferentes subdomínios do *Mathematical Knowledge for Teaching* e nos benefícios de considerar as diferentes histórias como elemento sustentador dessa discussão. Apresentam-se algumas problemáticas ainda existentes e oportunidades para investigações futuras.

Palavras-chave: *Mathematical Knowledge for Teaching*; História da Matemática e da Educação Matemática; Racionais.

Interpretative Knowledge and Knowledge for Teaching the History of Mathematics and of Mathematics Education: contributions for teacher education

Abstract

This paper discusses the need to enhance the development of teachers' Interpretative Knowledge, allowing assuming the students' knowledge, reasoning and productions as a starting point for the decision making in practice in the scope of rational numbers. Some potentialities – both for teacher education, practice and research – of considering the History of

Mathematics and of Mathematics Education simultaneously has a tool and has a context are discussed. Such discussion is centred on the content of the ideal knowledge included in each one of the Mathematical Knowledge for Teaching subdomains focusing also on the benefits of considering the different Histories as a grounding element for doing so. Some problematics and research opportunities are presented.
Keywords: Mathematical Knowledge for Teaching; History of Mathematics and of Mathematics Education; Rational numbers.

Conocimiento Interpretativo e para Enseñar Matemática e História de la (Educación) Matemática: contributos para la formación

Resumen

Este articulo discute la necesidad de potenciar el desarrollo del denominado *Conocimiento Interpretativo* del profesor que permita asumir como punto de partida para la prática posterior los conocimientos, razonamientos e producciones e los alumnos en el ámbito de los racionales. Se debaten potencialidades – para la formación y investigación– de considerar la Historia de la (Educación) Matemática al mismo tiempo una herramienta y un contexto efectuando una discusión centrada en el contenido ideal de cada uno de los diferentes subdominios del *Mathematical Knowledge for Teaching* y en los beneficios de considerar las diferentes historias como elemento que fundamente de dicha discusión. Se presentan también algunas problemáticas aun existentes y oportunidades para investigaciones futuras.
Palabras-clave: Conocimiento Interpretativo. Historia de la Matemática e de la Educación Matemática. *Mathematical knowledge for teaching*. Racionales.

Introdução/Motivação

A partir dos trabalhos e das ideias de Shulman (1986), vêm sendo desenvolvidas várias conceptualizações do conhecimento do professor, uma das quais tem recebido maior atenção e se refere ao *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Uma das particularidades desta conceptualização vincula-se ao fato de considerar a especificidade do conhecimento do professor, no que concerne tanto ao conhecimento matemático como ao conhecimento didático. Um mais amplo entendimento sobre essa especificidade é considerado fundamental para desenvolver um conhecimento matemático sustentado dos alunos, já que o conhecimento do professor é um dos fatores preponderantes para as aprendizagens deles (NYE; KONSTANTOPOULOS; HEDGES, 2004). Nesse sentido, e também porque esse conhecimento pode ser ensinado (HILL; BALL, 2004), a formação de professores (inicial e continuada) é, deveria ser, um dos fatores cruciais para a melhoria dessas aprendizagens.

Se, por um lado, o foco e o objetivo das tarefas preparadas desempenham um papel fundamental no processo de construção e desenvolvimento do conhecimento do professor (JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014), por outro lado, a conceptualização e as formas como essas tarefas são implementadas dependem, em grande medida, do nosso próprio conhecimento como formadores de professores – educadores matemáticos (GOODWIN et al., 2014; RIBEIRO, 2016); da forma como encaramos o nosso papel (MELLONE; JAKOBSEN; RIBEIRO, 2015); e da responsabilidade social que assumimos.

As experiências com que somos confrontados moldam (direta ou indiretamente) a nossa própria visão do mundo e, em particular as formas como perspetivamos o processo de ensino (por exemplo, o nosso papel enquanto professores e formadores; o papel dos alunos e da matemática), de modo a que não ensinemos como fomos ensinados em determinado nível – replicando o mesmo tipo de experiências que vivenciamos enquanto alunos (MELLADO; RUIZ; BLANCO, 1997; NICOL, 1999). Por essa razão, é essencial que a formação permita concretizar a visão teórica do processo de ensino que se considera "atualmente" (BRASIL, 1997; NCTM, 2000; OECD, 2004, 2010). Nesse sentido, um conhecimento sobre de onde vimos (trilhando o mesmo caminho que outros) possibilitará fazer escolhas mais informadas sobre para onde vamos (e para onde não desejamos ir – o que não pretendemos fazer e por quê), permitindo-nos novas descobertas.

Essa perspetiva de encarar a formação que facultamos atualmente, perspetivando o futuro e sustentada no passado, imbrica-se com um mais amplo entendimento dos aspetos históricos, de modo a contribuir para que não se repitam os erros do passado (pelo menos do passado de cada um enquanto alunos). Dessa forma, e porque mais importante do que apresentar informações (dando uma aula "tradicional" de História), é criar condições para que os professores possam complementar as experiências vivenciadas na formação com outras, que lhes permitam melhor compreender o que fazem e porque o fazem, um conhecimento sobre a História da Matemática e da Educação Matemática é de soberana importância. Esse conhecimento, quando incorporado no seu MKT (não sendo, portanto, considerado um conteúdo a aprender por si só), poderá gerar uma postura crítica e reflexiva, que contribua para o desenvolvimento profissional do professor de forma sustentada e matematicamente correta e adequada.

Assim, assumindo a centralidade do conhecimento do professor para a melhoria das práticas e das aprendizagens dos alunos, conjugada com a necessidade de um mais amplo conhecimento das Histórias (da Matemática e da Educação Matemática), por forma a que essa melhoria futura se sustente também num conhecimento do passado, uma discussão sobre o conhecimento do professor centrado nessas Histórias é de importância fulcral. Considerando no centro da melhoria da formação e da prática o conhecimento especializado do professor, parece essencial, para o desenvolvimento desse conhecimento, considerar, de forma imbricada, um foco no desenvolvimento do conhecimento matemático (tópico) ao longo do tempo e nas dimensões históricas do Ensino e da Matemática.

Este texto tem por intuito contribuir para uma aproximação de dois contextos tradicionalmente distantes (História e conhecimento do professor), tendo como ponto de partida a discussão de uma tarefa para a formação de professores no âmbito dos racionais. Para essa aproximação, considera-se a História da (Educação) Matemática simultaneamente uma ferramenta (JANKVIST, 2009) e um contexto, e o conhecimento especializado do professor o aspeto central a desenvolver na formação (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; CARRILLO et al., 2013; RIBEIRO, 2013). Tendo sempre como objetivo último contribuir para a melhoria da formação e da prática, neste processo de aproximação várias questões têm emergido, e algumas delas serão também aqui enunciadas, de modo a que a busca de respostas permita avançar na aproximação da ainda tão discutida dicotomia teoria-prática.

Algumas notas teóricas

Antes de se iniciar uma qualquer discussão, que se pretende seja aberta a críticas e perspetivada como uma forma de aprender, é essencial minimizar as distorções entre aquilo que se diz e se questiona e o que cada um "dos outros" ouve e as formas como o poderá entender/interpretar. Este aspeto relaciona-se, também, de forma direta com o modo como são encarados a prática, a formação e os objetivos que se perseguem com essa formação. Em particular, encontra relação com a comunicação a que se recorre em cada uma das situações e com o que se poderá aprender durante o processo (LAMPERT; BLUNK, 1998; RIBEIRO; CARRILLO; MONTEIRO, 2010). Assim, ao pensar em qualquer atividade para ser desenvolvida com o professor de matemática (atual ou futuro) no contexto de uma formação em matemática, o núcleo central é sempre a matemática (algum conteúdo, competência ou "habilidade" matemática específica) e o conhecimento especializado do professor, sendo os demais aspetos considerados o contexto ou os recursos (encarados de modo amplo) aos quais se recorre para o desenvolvimento do elemento central – conhecimento do professor (exemplos dos livros didáticos; algum tipo de Tecnologia – entendida de forma ampla; episódios de sala de aula – vídeos ou relatos –; resoluções de alunos).

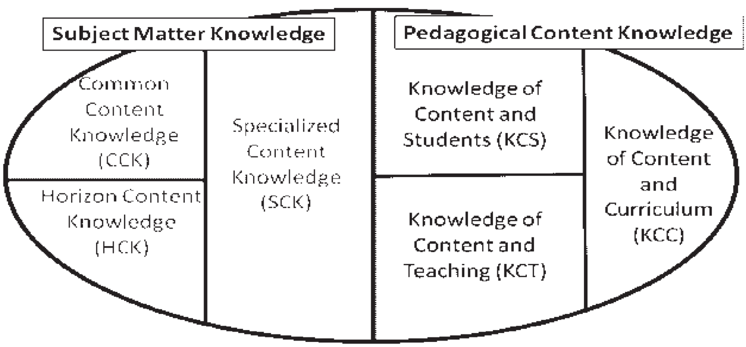
Nesse sentido, de forma a que se possa desenvolver e ampliar o conhecimento do professor, tendo em consideração a sua especificidade (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), é essencial que a formação se centre onde é, efetivamente, mais necessária, ou seja, em aspetos em que a investigação nos diz que alunos e professores revelam maiores dificuldades – que se configurem como matematicamente críticos (RIBEIRO; CARRILLO, 2011). Um desses conteúdos prende-se aos racionais (LAMON, 2007; PINTO; RIBEIRO, 2013) e é, ainda, uma das situações matematicamente críticas sobre a qual urge um foco específico, mais pormenorizado e efetivo, tanto na formação como na prática com os alunos, pois esses aspetos se associam, de forma imbricada, com uma grande diversidade de temas e conteúdos que os alunos terão de abordar ao longo da sua escolaridade. Isso faz dele um importante e estratégico tópico de interesse – por exemplo, sentido de número e de operação (e seus significados); transformações geométricas; proporcionalidade; constru**ção de gráficos; funções**.

As dificuldades de alunos e professores (PINTO; RIBEIRO, 2013) sustentam-se, também, no fato de os racionais se encontrarem entre os conceitos matemáticos mais complexos com que os alunos se defrontam nos primeiros anos (NEWSTEAD; MURRAY, 1998) e corresponderem a um construto multifacetado, com muitas conexões com diferentes formas de representar uma mesma quantidade (KIEREN, 1976). Para que a erradicação dessa criticidade dos racionais se possa tornar efetiva, é importante um foco no conhecimento matemático e didático do professor, tendo em consideração a especificidade desse conhecimento, quando comparado com o conhecimento matemático requerido por outros contextos em que a matemática é utilizada como ferramenta (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

A conceptualização do conhecimento do professor que Ball e colegas, na Universidade de Michigan (USA), desenvolveram considera, em cada um dos domínios do conhecimento definidos por Shulman (1986) e relacionados, de alguma forma, com os conteúdos a abordar – *Subject Matter Knowledge* e *Pedagogical Content Knowledge*–, três subdomínios. Essa conceptualização, ao sustentar-se na ideia de que existe um conhecimento matemático específico para a atuação docente (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 373), para além de considerar especificidades próprias do conhecimento didático, assume como essenciais aspetos particulares (especializado) do conhecimento matemático. Essas particularidades do conhecimento do conteúdo tornam possível considerar diferentes matemáticas , dependendo do contexto em que se trabalha – aqui, em particular, matemática para ensinar.

Note-se que o conteúdo de cada um dos subdomínios do MKT (Figura 1) se encontra associado ao nível de ensino em que se foca, bem como aos conteúdos a que se refere (JAKOBSEN; THAMES; RIBEIRO; DELANEY, 2012). Nesse sentido, o MKT ideal de professores do Ensino Médio **é distinto de um MKT ideal de professores das séries iniciais** do ensino fundamental ou Educação Infantil, bem como um MKT em tópicos de Geometria é distinto de um MKT em tópicos de Números.

Figura 1: Domínios do Conhecimento Matemático para Ensinar – MKT (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 403



Do lado esquerdo do modelo, incluídos no *Subject Matter Knowledge*, encontram-se o *Common Content Knowledge* (CCK); o *Specialised Content Knowledge* (SCK) e o *Horizon Content Knowledge* (HCK).

O CCK corresponde a um conhecimento matemático que o professor necessariamente deverá deter e que se relaciona com o saber fazer. No entanto, ele **é utilizado em outros contextos para além d**o ensino – corresponderá, por exemplo, a um conhecimento matemático de enfermeiros, associado à determinação de dosagens de medicamentos, ao recorrerem a proporções ou à determinação do resultado correto (ou **à** identificação da sua incorreção) de uma operação envolvendo frações – que se considera associado também a um pleno sentido de número (CASTRO; RODRIGUES, 2008; PIRES; COLAÇO; HORTA; RIBEIRO, 2013) e de operação.

Complementarmente a esse conhecimento sobre saber fazer (por exemplo, conhecer as definições de um conceito, saber resolver um problema, determinar o resultado de uma conta ou saber quando a conta está errada), ao professor cumprirá um conhecimento matemático **único**, associado às suas funções de ensinar. Esse conhecimento vincula-se, por exemplo, a navegar frutiferamente entre diferentes representações de um mesmo conceito (RIBEIRO, 2011); a entender os raciocínios que sustentam determinada resposta ou processos de resolução de problemas (THAMES; BALL, 2010); ou a conhecer os porquês matemáticos e históricos associados aos motivos que sustentam os processos associados ao modo de representar racionais na forma de fração, ou **à** adição e **à** subtração de frações. Relaciona-se ainda com o conhecimento envolvido em atribuir sentido às resoluções dos alunos, essencialmente quando elas são distintas das suas (JAKOBSEN, RIBEIRO; MELLONE, 2014), e **às** diferentes formas como os conteúdos podem ser encarados, dependendo da época histórica em que nos encontramos.

For fim, o HCK, que não é conhecimento matemático comum nem especializado, corresponderá a um conhecimento matemático que não é utilizado diretamente no processo de ensino no nível educativo em que o professor leciona (BALL; BASS, 2009), mas envolve um conhecimento mais avançado sobre a disciplina. Ball, Thames e Phelps (2008) e Ball e Bass (2009) consideram que esse conhecimento suportará os professores e os auxiliará a ouvir o que os alunos dizem, a orientar o processo de ensino e a fazer julgamentos bem informados sobre o que é matematicamente importante.

No entanto, a noção de conhecimento avançado pode ter várias interpretações e, assim, o HCK pode ser considerado sob distintas perspetivas. Seguindo trabalhos anteriores (JAKOBSEN et al., 2012), o HCK é considerado aqui de forma mais ampla do que apenas conhecer os tópicos de matemática avançada: seu contributo maior consiste em auxiliar o professor no processo de ensino-aprendizagem, relativamente ao que é matematicamente importante discutir e salientar, bem como entender e sustentar o desenvolvimento do tema nos raciocínios dos alunos – conhecer a que correspondem frações contínuas e os pressupostos históricos em que se sustentam poderá contribuir para "ouvir melhor" o que "dizem" os alunos.

Por outro lado, no domínio do *Pedagogical Content Knowledge* incluem-se: *Knowledge of Content and Teaching* (KCT), *Knowledge of Content and Students* (KCS) e *Knowledge of Content and Curriculum*. Assim, ao professor, para além de um conhecimento matemático particular relativamente aos vários conteúdos do currículo que tem de ensinar – mas também anteriores e posteriores (Conhecimento do Currículo) –, cumprirá um saber que lhe permita tornar acessível e compreensível esse conhecimento aos alunos (KCT), antecipando as suas possíveis dificuldades e facilidades em cada um desse temas (KCS).

Como parte do KCT encontra-se um conhecimento da diversidade de exemplos e recursos (incluindo aqui, também, as fontes históricas originais e os problemas históricos) que podem ser utilizados para explorar diferentes temas, bem como as potencialidades e as limitações de determinada sequenciação de exploração, relacionando-se com o seu conhecimento de como os alunos aprendem – de modo a potenciar as suas aprendizagens.

Para que o processo de ensino e aprendizagem (ideal) seja potenciado, ao professor caberá também um saber que associe um conhecimento das maiores dificuldades e ideias errôneas dos alunos (e o que as sustenta) com um conhecimento matemático vinculado a essas dificuldades (KCS), permitindo sua antecipação e colmatagem. Assim, cumprir-lhes-á, por exemplo, um conhecimento associado a saber que uma das dificuldades dos alunos se revela ao efetuarem a transposição da adição de naturais para o contexto das frações e ao encararem as frações essencialmente como parte-todo.

A percepção da unidade e do seu papel também é um aspeto problemático. No entanto, esse conhecimento histórico-matemático (sobre as dificuldades dos alunos) não deverá ser encarado como um fim em si mesmo, mas como um caminho para um mais amplo conhecimento e visão da própria matemática e dos motivos que sustentam essas dificuldades, de modo a que possa ser utilizado com potencialidades didáticas – no sentido da necessidade identificada por Miguel e Miorim (2002).

Para que as dificuldades antecipadas possam ser colmatadas, um conhecimento sobre o desenvolvimento histórico das operações e dos racionais; das fontes originais onde esses aspetos são discutidos; da História da Educação Matemática Brasileira (situando-a no contexto internacional); e dos pressupostos em que o ensino se sustentava em cada uma das épocas poderá melhor sustentar as abordagens a efetuar com os alunos.

Conhecimento matemático para ensinar e História da (Educação) Matemática

Ao analisar determinada situação ou contexto, os resultados que se obtêm têm em consideração a(s) perspetiva(s) teóricas e metodológicas em que se sustenta essa análise. Assim, partindo da discussão de um exemplo concreto que emergiu de trabalhos anteriores focando o conhecimento do professor no âmbito dos racionais (JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014; PINTO; RIBEIRO, 2013; RIBEIRO, 2011; RIBEIRO; MELLONE; JAKOBSEN, 2013), aqui se reinterpretam os resultados obtidos e a metodologia utilizada. Esta reinterpretação pretende ampliar o entendimento alcançado anteriormente, considerando o MKT como aspeto central (tal como ocorreu inicialmente), mas assumindo agora a História da (Educação) Matemática como uma ferramenta e como um contexto que contribua para alcançar um entendimento mais amplo e profundo do conteúdo de cada um dos subdomínios do MKT.

O exemplo que se discute (e se apresenta abaixo) deriva de um trabalho que tem sido realizado focando um aspeto central do

ISSN Impresso:1415-9902 • ISSN Eletrônico: 2176-1043

conhecimento do professor, que se refere ao conhecimento associado à atribuição de sentido às resoluções de outros (alunos), essencialmente quando essas resoluções são "estranhas" e, portanto, distintas do que poderia ser esperado (JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014; RIBEIRO; MELLONE, JAKOBSEN, 2013). Esta dimensão específica do conhecimento do professor que, considerando a conceitualização do MKT, relaciona aspetos particulares do CCK e SCK, é denominada de "Conhecimento Interpretativo" (JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014; RIBEIRO; MELLONE; JAKOBSEN, 2016). Este conhecimento do professor corresponde aquele que é (deveria ser) mobilizado no sentido de possibilitar desenvolver o conhecimento, competências e capacidades matemáticas dos alunos tendo como ponto de partida as suas produções e comentários, que exteriorizam os seus entendimentos e raciocínios matemáticos. Assumir este ponto de partida demanda um conhecimento matemático específico do professor (SCK e, necessariamente CCK, já que o especializado não existe sem o comum – RIBEIRO; MONTEIRO; CARRILLO, 2010). Este conhecimento interpretativo é aquele que permitirá ao professor atribuir significado matemático às produções e comentários dos alunos de modo a poder, posteriormente, fornecer um *feedback* construtivo – perseguindo os objetivos matemáticos delineados em termos das aprendizagens dos alunos – e desenvolver uma prática que tenha efetivamente essa preocupação central de partir dos entendimentos dos alunos e de não impor, à partida, a forma de ver, de fazer e/ou entender do professor.

No contexto deste trabalho, foi solicitado que (futuros) professores (de Portugal, Itália e Noruega) respondessem a uma tarefa que tem como ponto de partida um problema retirado de um livro de texto do 6.º ano de escolaridade – alunos de 12 anos (incluído num capítulo dedicado às frações) em Portugal. A tarefa proposta inclui duas partes. Com a primeira, pretende-se promover a reflexão dos (futuros) professores, associada à resolução do "problema" para si mesmos, apresentando a sua própria resposta (que se relaciona com um CCK) e, posteriormente, é solicitado que apresentem uma possível resolução de um aluno de 6.º ano. Na segunda parte oferecem-se sete produções de alunos ao problema inicial e pretende-se que os (futuros) professores atribuam sentido a essas produções e forneçam um *feedback* aos alunos. Aqui se apresentam e se discutem apenas duas dessas resoluções.

Tarefa – Parte I

A professora Maria pretende explorar com os seus alunos algumas noções associadas ao conceito e *à* natureza das frações, tendo com esse intuito preparado um conjunto de tarefas envolvendo cinco barras de chocolate iguais. A seguir se encontra a tarefa que ela preparou para os seus alunos.

Que quantidade de chocolate receberá cada uma de seis crianças, se dividirmos equitativamente as cinco barras de chocolate entre elas?

1. Responde ao problema colocado pela professora Maria (deves responder para ti próprio e não como um aluno).
2. Como consideras que um aluno do 6º ano responderia à questão anterior?

Tarefa – Parte II

Considera as seguintes produções de alunos ao problema inicial.

Para cada uma das produções dos alunos indica se a consideras matematicamente correta (adequada) ou não, justificando a tua resposta. Nos casos em que consideres as respostas inadequadas, regista um possível feedback a fornecer ao aluno de modo a auxiliá-lo no desenvolvimento do seu conhecimento matemático.

ISSN IMPRESSO:1415-9902 • ISSN ELETRÔNICO: 2176-1043

Figura 2: Resolução da Mariana, exclusivamente pictórica

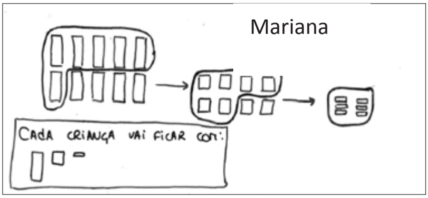
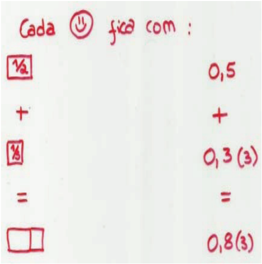


Figura 3: Resolução da Madalena, conjugando representação pictórica e numérica



Com a primeira questão (e sua posterior discussão), potencia-se uma reflexão relativamente a um conhecimento matemático “elementar”, que permite responder a uma atividade que alunos do 6.º ano devem estar aptos a desenvolver (CCK – do nível dos alunos). Esse conhecimento implica saber operar com frações (no sentido de encontrar o resultado final) e está associado ao sentido de número (CASTRO; RODRIGUES, 2008; PIRES et al., 2013) e ao fato de um número poder ser também considerado como o resultado da medida de uma grandeza – comparação de uma grandeza com a unidade. Note-se que, para a obtenção da resposta, e apesar de envolver um conhecimento comum que se considera do nível de alunos de 6.º ano, resultados da investigação revelam respostas de futuros professores ao problema ainda no âmbito dos números inteiros (apresentando como resposta “*5 pedacinhos*”), embora o enunciado mencione explicitamente o objetivo de explorar noções associadas às frações (JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014). Esse resultado se mostra, em si, problemático, já que limita substancialmente o ponto de partida para a formação de professores.

A segunda questão, ao solicitar que os resolutores antecipem possíveis respostas de alunos para o problema inicial, associa-se a um conhecimento integrado da matemática (em particular alguns aspetos do conhecimento especializado – SCK) e dos alunos (KCS). É de salientar que, mesmo no contexto da formação inicial de professores, sendo esta considerada a gênese do seu desenvolvimento profissional (RIBEIRO, 2013), é preciso assumir a importância desenvolver o saber docente em todas as dimensões, uma das quais é o conhecimento das possíveis produções, raciocínios e argumentos, associadas às suas dificuldades e, necessariamente, possíveis formas de as erradicar. Assim, para responder a esta segunda questão, deverá ter-se em conta (conhecer) que, frequentemente, os alunos recorrem a representações pictóricas como forma de sustentar os processos algébricos que realizam, e nem sempre se verifica uma adequada navegação entre esses dois tipos de representação. Por outro lado, uma das dificuldades dos alunos (e professores) associa-se também ao papel da unidade, ou seja, à tarefa de definir a que determinada unidade corresponde em cada situação (PINTO; RIBEIRO, 2011). Envolve também um conhecimento associado à antecipação das dificuldades dos alunos relativas ao "simples" entendimento da fração como parte-todo: para colmatar essa dificuldade, um conhecimento histórico da evolução do conceito (SCK) poderá auxiliar o professor a elaborar as suas argumentações, explorando exemplos que tenham significado para os alunos e sejam historicamente verídicos.

O conhecimento associado à antecipação de dificuldades e possíveis representações utilizadas inclui-se no KCS; e aquele associado às diferentes representações consideradas e formas de navegar frutiferamente entre elas é considerado um SCK. Entre essas representações consideradas na antecipação das respostas, podem incluir-se algumas envolvendo operações entre racionais na forma de fração (adição e/ou subtração). Daí decorre que se encontre também envolvido um SCK associado a conhecer os porquês e o motivo pelo qual historicamente normalmente se exige que os alunos igualem os denominadores, ao adicionar e/ou subtrair frações.

Para além disso, considerando a História da Matemática, um conhecimento relativo às origens históricas e aos fundamentos matemáticos associados a esses porquê será de extrema importância. Também um conhecimento da História da Educação Matemática brasileira contribuirá para que os professores atribuam sentido às formas como foram eles próprios ensinados e, desse modo, possam perspectivar outros modos de abordar os conteúdos. O recurso às fontes originais (sabendo também onde as encontrar) poderá assumir aqui um papel essencial na atribuição de sentido ao próprio conteúdo matemático (ARCAVI; BRUCKHEIMER; BEN-ZVI, 1983).

Com a segunda parte da tarefa, ao considerar resoluções "não típicas" de alunos, pretende-se aceder ao denominado conhecimento interpretativo do professor e, posteriormente, desenvolvê-lo (RIBEIRO; MELLONE, JAKOBSEN, 2013; JAKOBSEN et al., 2014). Nesse sentido, a escolha das produções a incluir na tarefa é de extrema importância; e, em particular, as duas que se ilustram aqui (Figura 2 e Figura 3) potenciam a discussão de três tipos distintos de representações associadas à resposta de um mesmo problema, bem como aspetos relacionados com o conhecimento da História da Matemática e da Educação Matemática essencialmente, mas não exclusivamente, no âmbito dos racionais. Essas produções permitem explorar, por um lado, o conhecimento associado a uma navegação frutífera entre elas (RIBEIRO, 2011), atribuindo sentido a cada uma e perspetivando a sua equivalência; e, por outro lado, considerar uma perspetiva histórica e o recurso às fontes originais permitirá explorar aspetos relacionados com a continuidade, a definição de dízima infinita periódica (e exemplos que o justifiquem), a noção de fração contínua (História da Matemática recente) ou diferentes formas de efetuar a adição de frações (por exemplo, o método Egípcio e Papirus de Rhind).

Na resolução apresentada por Mariana (Figura 2), as cinco barras de chocolate são representadas por retângulos divididos em dez partes iguais. O primeiro conjunto mostra a possibilidade de distribuir aquela quantidade (metade de uma barra) pelas seis crianças, sobrando ainda as restantes quatro metades. Essas quatro metades são, em seguida, divididas em metades, sendo seis delas distribuídas como anteriormente (metade de metade de uma barra para cada criança). Na última parte da representação, cada um dos quartos (metade de metade) restantes é dividido em três partes iguais. A resposta fornecida, sendo matematicamente correta, não considera uma representação numérica. Madalena (Figura 3) optou por responder recorrendo a uma representação pictórica e a sua correspondente numérica, utilizando, inclusive, nesta última das duas formas, decimal e fração. Entre os vários aspetos e potencialidades que levaram à inclusão dessa resposta na tarefa, incluem-se a relação complexa entre representações decimal e fracionária e a possibilidade de discutir a representação de dízima infinita periódica associada a 0,8(3), bem como as diferenças de raciocínio vinculado à obtenção dessa resposta em relação à anterior (JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014).

Assim, essa segunda parte da tarefa pretende contribuir para o desenvolvimento de um conhecimento interpretativo ideal, que permita atribuir sentido às resoluções dos alunos e possibilite fornecer um *feedback* construtivo. Assim, complementarmente ao CCK associado à obtenção de uma resposta correta ao problema (primeira parte da tarefa), ao professor compete também deter um SCK, incluindo conhecer um conjunto variado de definições de fração, seus significados e porquês matemáticos associados às suas diferenças e semelhanças (como divisão entre dois números em que o denominador é diferente de zero; uma ou mais partes iguais de um inteiro – partes de uma unidade; parte-todo; quociente; razão; operador) e as formas que essas definições foram mudando ao longo do tempo (MAGALHÃES, 2012), de acordo com o foco matemático predominante em cada época. Esse conhecimento envolve, portanto, a História da Educação Matemática. Também um conhecimento do sentido de número (CASTRO; RODRIGUES, 2008) poderá permitir o enriquecimento do *feedback* a ser fornecido ao aluno e das possíveis formas de explorar as situações em sala de aula. Porém, é preciso associar esse conhecimento a diferentes processos para determinar o valor do "número"; recorrer às fontes originais (ARCAVI; BRUCKHEIMER; BEN-ZVI, 1983) e a problemas históricos associados (conhecimento sobre), ao considerar a representação da fração em $\frac{a}{b}, b \neq 0$ como apenas uma das diferentes formas de representar as frações (usualmente associada à parte-todo); assumir que não existem formas "melhores ou piores" para essas representações e interpretações associadas (em termos absolutos), pois essas dependem do contexto em que se trabalha.

Note-se que, tal como o MKT ideal de professores das séries iniciais difere do MKT ideal de professores de ensino médio (JAKOBSEN et al., 2012), também, em particular, muitos dos aspetos do conteúdo que se consideram atualmente incluídos no SCK – uma vez que este conhecimento pode ser ensinado (HILL; BALL, 2004) – deverão passar a fazer parte de um conhecimento comum, assumindo a formação de professores um papel central nessa transformação. Essa assunção sustenta-se, por exemplo, no fato de que também os alunos têm o direito de conhecer e entender plenamente não apenas os porquês matemáticos e históricos que se encontram associados à necessidade de determinação de um denominador comum quando adicionam racionais na forma de fração, mas também o que sustenta a sua não determinação associada à multiplicação ou aos porquês associados à "regra" da divisão de frações de inverter e multiplicar.

De modo a possibilitar um mais amplo entendimento dos possíveis raciocínios dos alunos associados às suas resoluções e/ou comentários, potenciando, portanto, uma interpretação mais rica das suas resoluções, um conhecimento sobre a História da Matemática recente (quantidade como soma de frações unitárias – frações contínuas) – associado à resolução da Mariana – poderá contribuir para que o professor possa "ouvir" o que a Mariana quer dizer com a sua representação (possíveis raciocínios associados), capacitando-o a encarar possíveis formas de interpretar essa resolução e a tomar decisões mais fundamentadas sobre que direção tomar a partir daí – HCK. Também, na mesma linha (considerando a História da Matemática como fonte e instrumento potenciador de desenvolvimento de conhecimento matemático), um conhecimento da evolução histórica associada à (in)comensurabilidade; à emergência da $\sqrt{2}$; e de diferentes tipos de representação de uma mesma quantidade, permitirá discutir a equivalência entre as representações 0,8(3) e $0,8\overline{3}$, bem como os porquês associados à (im)possibilidade de distribuição (existência) dessa quantidade de chocolate por cada criança – relação com a história associada à existência de $\sqrt{2}$ e com a diferenciação entre variáveis contínuas e discretas.

Esse conhecimento do conteúdo contribuirá para, por um lado, sustentar as abordagens que o professor considerará e, por outro, observar o que poderá considerar serem as maiores dificuldades dos alunos (também historicamente) e como as colmatar. Assim, será importante conhecer e identificar bons (e maus) exemplos a explorar, incluindo problemas históricos e as fontes originais que permitam aos alunos (e professores) desenvolver o seu conhecimento sobre racionais bem como reconhecer que, "tradicionalmente", a forma mais comum de encarar fração corresponde ao sentido parte-todo, apesar de serem referidas no Currículo outras formas de encarar a fração (BRASIL, 1997 p. 68), o que limita um entendimento amplo dos racionais, quando, por exemplo, a unidade de referência é alterada (PINTO; RIBEIRO, 2013). Esse entendimento do que corresponde ao "tradicionalmente" e as implicações associadas (limitações nas aprendizagens dos alunos) sustentam-se, também, num conhecimento da História da Educação Matemática brasileira[1] e das inter-relações entre essa História local e as correntes internacionais predominantes em cada época.

De modo a permitir não apenas interpretar as respostas dos alunos com uma visão situada no contexto e na etapa educativa em que lecionam (e, portanto, uma visão limitada), mas também potenciar a decisão de que rumo tomar, tendo uma visão de futuro, será também essencial ao professor um conhecimento relativo aos diferentes temas contempladas no currículo, suas relações e de

[1] Será importante ter em consideração também a existência de distintas Histórias dentro de uma mesma História, considerando também a especificidade de cada contexto e a diversidade social e cultural (GERDES, 1984), bem como da Etnomatemática (D'AMBROSIO, 2001).

que formas vão evoluindo (Conhecimento Curricular). Entre essas encontra-se, por exemplo, saber em que etapas educativas as frações devem ser abordadas e a ordem pela qual essa abordagem é contemplada (os PCN [BRASIL, 1997, p. 68] referem que a fração como operador deverá ser abordada depois dos demais significados), bem como conhecer uma multiplicidade de formas de o fazer.

Potencialidades para a formação e necessidades futuras

Com a discussão do exemplo apresentado, pretendeu-se evidenciar, por um lado, as potencialidades do conhecimento da História da Matemática e da Educação Matemática para a exploração de conteúdos matemáticos e a atribuição de significado a resoluções dos alunos; e, por outro, os possíveis benefícios e a necessidade da inclusão desses aspetos da História como parte integrante do conhecimento matemático para ensinar. Um foco no conhecimento ideal do professor para ensinar, recorrendo à História da Matemática como ferramenta (JANKVIST, 2009) para enriquecer o conteúdo desse conhecimento, configura-se como um aspeto potenciador da conceptualização e da exploração de tarefas, na formação de professores, que tenham como objetivo desenvolver o conhecimento destes. Uma vez que o professor assume um papel crucial nas aprendizagens dos alunos (NYE; KONSTANTOPOULOS; HEDGES, 2004) e na integração das suas experiências e culturas nas atividades matemáticas (BISHOP, 1988), o desenvolvimento e a extensão do conhecimento do professor, com foco em aspetos que permitam ampliar nos alunos a habilidade de resolver e formular problemas contextualizados (RIBEIRO; AMARAL, 2015), contribuirão para intensificar a literacia matemática da sociedade (OECD, 2003) como um dos objetivos centrais de toda formação de professores. Uma extensão desse conhecimento permitirá, espera-se, contribuir para desenvolver o conhecimento matemático dos alunos. Essa corresponde, ainda, a uma das áreas que carecem de investigação e revela, portanto, potencialidades para contribuir com informações para a investigação, a formação e a prática.

A partir de uma discussão do MKT ideal associado às tarefas preparadas e propostas na formação de professores – aqui, em particular, com um foco no desenvolvimento do conhecimento interpretativo (JAKOBSEN, RIBEIRO; MELLONE, 2014) –, torna-se também possível equacionar algumas questões relativamente ao papel que a História da Matemática e a História da Educação Matemática podem assumir na formação de professores. O levantar dessas questões pretende contribuir também para que essa História possa ser considerada com todas as suas potencialidades para a formação, assumindo-se como mais um dos aspetos a considerar quando da conceptualização de formas que permitam desenvolver o conhecimento matemático para ensinar. Papel que não é, ainda, entendido como essencial a essas Histórias (GOMES; BRITO, 2009).

Uma discussão e o equacionar de questões relacionadas com o conhecimento do professor e o papel da História da (Educação) Matemática na formação e na melhora do conhecimento destes (como conteúdo, contexto, método) pretendem contribuir também para questionar o próprio posicionamento enquanto formadores de professores. Assim, considerar estas Histórias como um contexto e um recurso para o desenvolvimento desse conhecimento e não como um fim em si mesmo, pretende permitir desenvolver o conhecimento histórico-matemático dos professores, perspetivando as suas potencialidades didáticas (MIGUEL; MIORIM, 2004). Pretende também contribuir para que os professores (atuais ou futuros) saiam do seu próprio espaço de conhecimento (da História da Educação Matemática) que, "tradicionalmente", se relaciona somente com as suas experiências enquanto alunos. E, por isso, além de terem uma visão parcial do processo de ensino e aprendizagem (LORTIE, 1975), limitam-se ao que já nem sequer seriam as orientações oficiais na **época**[2]. Pensar neste espaço de conhecimento

2 Se assumirmos que os professores ensinam como foram ensinados (MELLADO; RUIZ; BLANCO, 1997), então os futuros professores de hoje terão sido ensinados por professores que frequentaram essas etapas educativas a partir das décadas de 60 e 70 do século passado – altura em que se encontrava em vigor a tendência da Matemática Moderna.

remete à História da Educação e, em particular, da Educação Matemática e a diferentes abordagens e focos do processo de ensino em distintas épocas – uma delas aquela em que os professores (atuais e/ou futuros) eram, eles próprios, alunos da etapa educativa em que lecionam ou virão a lecionar.

O papel da História da (Educação) Matemática na formação que se faculta relaciona-se, assim, ao próprio conhecimento e à visão de ensino dos formadores de professores, aos quais cumpre, portanto, a responsabilidade de dominar um MKT e de conceptualizar tarefas que permitam aos professores tornar-se conhecedores e conscientes das implicações dos seus focos, na prática, para a aprendizagem dos alunos (MELLONE; JAKOBSEN; RIBEIRO, 2015). Esse conhecimento e essa conscientização pretendem potenciar, também, uma prática distante daquela que experienciaram enquanto alunos da etapa educativa à qual lecionam ou podem vir a lecionar (MELLADO; RUIZ; BLANCO, 1997); e possibilitar que, concomitantemente, desenvolvam o seu MKT. Nesse sentido, perspetiva-se melhorar a formação que se faculta (também pela identificação e pela discussão de situações matematicamente críticas – [RIBEIRO; CARRILLO, 2011]) e ter também em consideração algumas problemáticas "antigas" – saber de onde vimos para perspetivar para onde vamos – de forma a que os professores passem a atribuir uma relevância didática à história da matemática (MIGUEL; MIORIM, 2004) e da Educação Matemática. Por isso, é importante questionar – e procurar respostas para tais questões –, entre outros[3]: (a) qual o papel assumido pela História da Matemática (e da Educação Matemática) na prática e na formação de professores dos diferentes níveis educativos?; (b) como é (e poderia ser) integrada a História da Matemática na formação de professores e quais os objetivos associados?; (c) que tarefas conceptualizar (natureza, foco, objetivos) para desenvolver o conhecimento históri-

[3] Obviamente, por detrás de cada uma destas questões existe uma conceptualização do que se refere a, por exemplo, o MKT ideal; tarefas para a formação de professores (e suas especificidades) ou a que corresponderá ser professor no século XXI e para ele.

co-matemático (na perspetiva das especificidades do conhecimento docente) do professor?; (d) como pode ser explorada a dualidade entre as especificidades do conhecimento do professor (aqui assumindo o MKT) e História da (Educação) Matemática, de forma a enriquecer tanto a conceptualização do MKT como o conhecimento do professor sobre essas Histórias?; (e) que tarefas preparam os professores e que argumentos apresentam, no contexto de uma formação que pretende desenvolver o seu MKT, sendo a História da Matemática uma ferramenta para esse desenvolvimento?

Diferentes formas de encarar cada um desses focos podem levar a diferentes linhas de trabalho, mas esse próprio percurso e os resultados encontrados (tanto teóricos como metodológicos), se discutidos à luz de diferentes teorias poderão tornar-se potenciadores de mudança, conduzindo a uma melhora do conhecimento do professor e da prática e a uma aproximação entre História da Matemática e da Educação Matemática (VALENTE, 2010) e contribuindo para quebrar as correntes que restringem (RIBEIRO, 2013) tanto a investigação como a prática e a formação.

Referências

ARCAVI, Abraham; BRUCKHEIMER, Maxim; BEN-ZVI, Ruth. May be a mathematics teacher can profit from the study of the history of mathematics. **Learn Mathematics**, v.3, n. 1, p. 30-37, 1983.

BALL, Deborah; BASS, Hyman. With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Paper presented at The 2009 Curtis Center Mathematics and Teaching Conference, 2009.

BALL, Deborah; THAMES, Mark; PHELPS, Geofrey. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v.59, n.5, p. 389-407, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CASTRO, Joana; RODRIGUES, Margarida. **Sentido de número e organização de dados.** Textos de apoio para educadores de infância. Lisboa: ME-DGIDC, 2008.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

GERDES, Paulo. A matemática ao serviço do povo. **Ciência e Tecnologia**, n.7, p. 8-14, 1984.

GOMES, Maria Laura; BRITO, Arlete. Vertentes da produção acadêmica brasileira em história da educação matemática: as indicações do EBRAPEM, **Bolema**, Rio Claro, v.22, n.34, p. 105-130, 2009.

HILL, Heather; BALL, Deborah. Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.35, n.5, p. 330-351, 2004.

JANKVIST, Uffe. A categorization of the "whys" and "hows" of history in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, v.71, n.3, p. 235-261, 2009.

JAKOBSEN, Arne; THAMES, Mark, Hoover; RIBEIRO, Miguel; DELANEY, Sean. Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge. In ICME (Ed.), **Proceedings do 12th International Congress in Mathematics Education (12th ICME).** Seoul: ICME, 2012, p. 4635-4644.

JAKOBSEN, Arne; RIBEIRO, Miguel; MELLONE, Maria. Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. **Nordic Studies in Mathematics Education**, v.19, n.3-4, p. 135-150, 2014.

KIEREN, Thomas. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, RICHARD. (Ed.). **Number and measurement:** Papers from a research workshop. Columbus, OH: ERIC/SMEAC, 1976. p. 101-144.

LAMON, Susane. Rational numbers and proportional reasoning. In: LESTER, FRANK. (Ed.). **Second handbook ok mathematics teaching and learning**. Greenwich, CT: Information Age Publishing, 2007. p. 629-667.

LAMPERT, Magdalen; BLUNK, Merry. **Talking mathematics in school**: Studies of teaching and learning. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1998.

LORTIE, DAN. **Schoolteacher**: a sociological study. Chicago: The University of Chicago Press, 1975.

MAGALHÃES, Maria Laura. **História do ensino da Matemática**: uma introdução. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012. 68 p.

MELLADO, Vicent; RUIZ, Constantino; BLANCO, Lorenzo. Aprender a enseñar Ciencias Experimentales en la formación inicial de maestros. **Bórdon**, v.49, n.3, p. 275-288, 1997.

MELLONE, Maria; JAKOBSEN, Arne; RIBEIRO, Miguel. Mathematics educator transformation(s) by reflecting on students' non-standard reasoning. In **proceedings CERME 9**, Praga: ERME, 2015, p. 2874-2880.

MIGUEL, António; MIORIM, Maria Ângela. História da Matemática: uma prática social de investigação em construção. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n. 36, p. 177-203, 2002.

MIGUEL, António; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática**: proposta e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. 208 p.

NEWSTEAD, Karen; MURRAY, Handley. Young students' constructions of fractions. In: OLIVIER, ALWYN; NEWSTEAD, KAREN. (Ed.), **Proceedings of the 22nd PME**. Stellenbosch, South Africa, 1998. v.3, p. 295-303.

NICOL, Cintia. Learning to teach mathematics: questioning, listening, and responding. **Educational Studies in Mathematics**, v.37, p. 45-66, 1999.

NYE, Barbara; KONSTANTOPOULOS, Spyrus; HEDGES, Larry. How large are teacher effects? **Educational Evaluation and Policy Analysis**, v.26, n.3, p. 237-257, 2004.

OECD. **Literacy skills for the world of tomorrow**. Further results from PISA 2000. Paris: OECD, 2003.

OECD. **Learning for tomorrow's world**. First results from PISA 2003. Paris: OECD, 2004.

OECD. **PISA 2009 results**: What students know and can do. Student performance in reading, mathematics, and science. Paris: OECD, 2010, v.1.

PINTO, Hélia; RIBEIRO, Miguel. Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional. **Da Investigação às Práticas**, v.3, n.1, p. 85-105, 2013.

PIRES, Ana; COLAÇO, Helena; HORTA, Helena; RIBEIRO, Miguel. Desenvolver o sentido de número no Pré-Escolar, **Exedra**, v.7, p. 120-135, 2013.

RIBEIRO, Miguel. Abordagem aos números decimais e suas operações: a importância de uma “eficaz navegação” entre representações. **Educação e Pesquisa**, v. 37 n. 2, p. 407-422, 2011.

RIBEIRO, Miguel. Del cero hasta más allá del infinito – algunas perspectivas desde el comienzo de la tesis doctoral hasta el futuro ‘también’ a largo plazo. In: Investigación em Educación Matemática, 17, 2013, Bilbao. **Investigación en Educación Matemática XVII**, 2013. p. 85-71.

RIBEIRO, Miguel; AMARAL, Rúbia. Early years prospective teachers’ specialized knowledge on problem posing In: **Proceedings PME 39**, Hobart, Australia: PME, 2015. v.4. p.81-88.

RIBEIRO, Miguel; CARRILLO, José. Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. In: UBUZ, B. (Ed.). **Proceedings PME 35**. Ankara, Turkey: PME, 2011. v.4, p. 41-48.

RIBEIRO, Miguel; CARRILLO, José; MONTEIRO, Rute. Práticas comunicativas de uma professora de matemática. In proceedings **Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIEM 2010)**. Costa da Caparica: SPIEM, 2010, p. 224-237.

RIBEIRO, Miguel; MELLONE, Maria; JAKOBSEN, Arne. Prospective teachers’ knowledge in/for giving sense to students’ productions. In A.M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.). **Proceedings of PME 37**. Kiel, Germany: PME, 2013, v.4, p. 89-96.

RIBEIRO, Miguel; MONTEIRO, Rute; CARRILLO, José. ¿Es el conocimiento matemático del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra. **Educación Matemática**, v. 22 n.2, p. 93-108, 2010.

SHULMAN, Lee. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v.15, n.2, p. 4-14, 1986.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História da educação matemática: considerações sobre suas potencialidades na formação do professor de matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 23, n.35, p. 123-136, 2010.

MIGUEL RIBEIRO
Faculdade de Educação
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) e Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática (PECIM)
Grupo de Pesquisa da Prática Pedagógica em Matemática (PraPeM)
Grupo de Pesquisa e Formação CIEspMat: Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor de/que ensina Matemática
Email: cmribas78@gmail.com